Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. UPCT
Titulación: Grado en Ingeniería Mecánica
Asignatura: Matemáticas I

HOJA DE PROBLEMAS: INTRODUCCIÓN. NÚMEROS COMPLEJOS

1. Escribe en lenguaje matemático las siguientes afirmaciones:

   (a) Sea f una aplicación entre dos conjuntos X e Y. f es inyectiva si y sólo si para todo par de elementos del conjunto inicial tales que su imagen es la misma, entonces los elementos son iguales.

   (b) Sea f una aplicación entre dos conjuntos X e Y. f es sobreyectiva si y sólo si para cada elemento y del conjunto de llegada existe un elemento x del conjunto de partida cuya imagen por f es igual a y.

   (c) Dado un número complejo z no nulo, se define el logaritmo de z como el conjunto de números complejos cuya parte real es igual a logaritmo neperiano del módulo de z y cuya parte imaginaria es un argumento de z.

2. Traduce al castellano los siguientes enunciados matemáticos:

   (a) Dadas $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$, se define $g \circ f: X \to Z$ como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

   (b) Dados $A = \{1, 9, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 9\}$ y $A \cap B = \{1, 3\}$.

   (c) $\forall x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$, se tiene que $x^2 > 0$.

3. Calcula las siguientes operaciones de números complejos:

   (a) $(-2+\mathbf{i}) + (\frac{-1}{2} - 3\mathbf{i})$ (b) $(-2-3\mathbf{i}) - (-3+\frac{1}{2}\mathbf{i})$ (c) $-2\cdot(-1-\mathbf{i}) - 3\cdot(-2+\mathbf{i}) + 2\cdot(1-2\mathbf{i})$

   (d) $(-2-\mathbf{i})\cdot(-3+\frac{1}{2}\mathbf{i})$ (e) $\dfrac{1}{-1-2\mathbf{i}}$ (f) $\dfrac{-1-\mathbf{i}}{-2+\mathbf{i}}$

4. Obtén las formas polares y trigonométricas de los siguientes números complejos:

   (a) $1+\mathbf{i}$ (b) $-\mathbf{i}$ (c) $-1+\sqrt{3}\mathbf{i}$

   (d) $2\sqrt{3}-2\mathbf{i}$ (e) $-1-\mathbf{i}$ (f) $-2+\mathbf{i}$

5. Obtén la forma binómica de los siguientes números complejos:

   (a) $2_{\frac{\pi}{3}}$ (b) 1_{π} (c) $3_{\frac{5\pi}{4}}$

6. Calcula las siguientes operaciones de números complejos, expresando el resultado en forma polar:

   (a) $2_{\frac{5\pi}{3}} \cdot 3_{\frac{\pi}{2}}$ (b) $1_{\frac{7\pi}{4}} \cdot 2_{\frac{7\pi}{3}}$ (c) $\dfrac{4_{\frac{5\pi}{2}}}{2_{\frac{2\pi}{3}}}$ (d) $\dfrac{12(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4})}{8_{\frac{5\pi}{4}}}$

7. Calcula:

   (a) $(1-\sqrt{3}\mathbf{i})^6$ (b) $(1-\mathbf{i})^8$ (c) $(-\sqrt{3}+\mathbf{i})^{10}$

   (d) $(2_{\frac{7\pi}{6}})^5$ (e) $\mathbf{i}^5 + \mathbf{i}^{16}$ (f) $\mathbf{i}^{106}$

8. Calcula las siguientes raíces de números complejos:

   (a) $\sqrt[3]{-1}$ (b) $\sqrt[5]{-\mathbf{i}}$ (c) $\sqrt{-1+\mathbf{i}}$ (d) $\sqrt[3]{-4-4\sqrt{3}\mathbf{i}}$

9. Representa gráficamente los siguientes subconjuntos del plano complejo:

   (a) Números complejos cuyo módulo es igual a 1
   (b) $\{z \in \mathbb{C} : z + \overline{z} \leq 1\}$
   (c) Números complejos tales que el valor absoluto de su parte real es menor que 1
   (d) $\{z \in \mathbb{C} : z - \overline{z} = \mathbf{i}\}$

10. Resuelve las siguientes ecuaciones algebraicas y expresa el resultado en forma binómica:

$$(a)\ z + 4\mathbf{i}z = 1 \qquad (b)\ 2_{\frac{\pi}{3}} + \mathbf{i} + ze^{-\frac{\pi}{3}\mathbf{i}} = 0$$

11. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $f(t) = 4e^{-t}e^{100\pi t\mathbf{i}}$. Representa gráficamente Re $f(t)$ e Im $f(t)$.

12. **(Física II)** [1] Supongamos que tenemos un circuito de corriente alterna tipo LCR con una resistencia con valor $R = 20\Omega$, un condensador con valor $C = 33{,}3\mu F$ y una bobina con valor $L = 0{,}01 Henrios$. Se supone que la fuente de voltaje (o fuerza electromotriz) viene dada por $\mathcal{E}(t) = 353{,}5\cos(\omega t + \phi)$, con $\omega = 3000$ rad/s y $\phi = -10°$. Nótese que la frecuencia ω está expresada en radianes mientras que la fase inicial ϕ en grados. Por tanto, al hacer cálculos hemos de expresar **ambas** magnitudes en radianes o grados, pero no una en radianes y la otra en grados. También hemos de tener en cuenta las unidades físicas en que expresamos las distintas magnitudes del problema. Por ejemplo, en el enunciado anterior, la Capacitancia del capacitador está dada en microfaradios por lo que hemos de multiplicar por 10^{-6} para expresarla en Faradios y que de esta forma todas las magnitudes estén expresadas en unidades del Sistema Internacional (S.I). Se pide:

(a) Calcula la impedancia compleja del circuito, la cual se define como $\vec{z} = R + (\omega L - \frac{1}{\omega C})\mathbf{j}$, donde $\mathbf{j} = \mathbf{i} = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria pura.

(b) Sabiendo que $\vec{E} = 353{,}5e^{-10\mathbf{j}}$ y que $\vec{E} = \vec{I}\vec{z}$, calcula $\vec{I}$ expresando el resultado en forma polar.

(c) Calcula las siguientes magnitudes físicas: (i) $\vec{V}_R = R\vec{I}$, $\vec{V}_L = \vec{I}\vec{X}_L$, donde $\vec{X}_L = \omega L\mathbf{j}$ se llama reactancia inductiva, (iii) $\vec{V}_C = \vec{I}\vec{X}_C$, donde $\vec{X}_C = -\frac{1}{\omega C}\mathbf{j}$ se llama reactancia del capacitador.

Solución: *(a)* $\vec{z} = R + (\omega L - \frac{1}{\omega C})\mathbf{j} = 20 + (3000 \cdot 0{,}01 - \frac{1}{3000 \cdot 33{,}3 \cdot 10^{-6}})\mathbf{j} = (20 + 20\mathbf{j})\Omega$ *(b) Empezamos escribiendo* $\vec{z}$ *en forma polar. Se tiene* $\vec{z} = 20 + 20\mathbf{j} = \sqrt{20^2 + 20^2}_{\arctan \frac{20}{20}} = 28{,}8_{45°}$. *Por tanto,* $\vec{I} = \frac{353{,}5_{-10}}{28{,}8_{45}} = 12{,}5_{-55°}$. *(c)* $\vec{V}_R = R\vec{I} = 20 \cdot 12{,}5_{-55°} = 250_{-55°}$
$\vec{V}_L = \vec{I}\vec{X}_L = 12{,}5_{-55°} \cdot 30_{90°} = 375_{35°}$
$\vec{V}_C = \vec{I}\vec{X}_C = 12{,}5_{-55°} \cdot 10_{-90°} = 125_{-145°}$

Referencias

[1] Apuntes de la asignatura Física II proporcionados por los profesores Esther Jódar y José Abad.

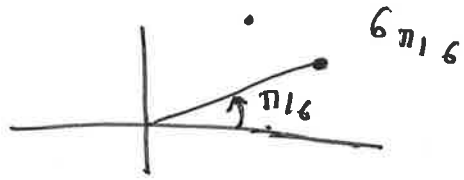
Ejercicios Hoja Nºs complejos

(3) a) $(-2+i)+(-\frac{1}{2}-3i) = -2-\frac{1}{2}+i(1-3)$

$= -\frac{5}{2} - 2i$

f) $\frac{-1-i}{-2+i} = \underbrace{\frac{-1-i}{-2+i} \cdot \frac{-2-i}{-2-i}}_{z\cdot\bar{z} = |z|^2 = (-2)^2+1^2 = 5} = \frac{2+i+2i-1}{5} = \frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$

(6) a) $2_{\frac{5\pi}{3}} \cdot 3_{\frac{\pi}{2}} = 6_{\frac{\pi}{6}}$



$\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{10\pi+3\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$

argumento principal $\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{13\pi - 12\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ rad. $= 30°$

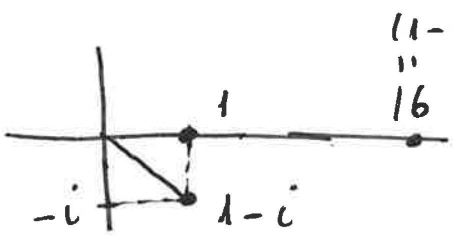
$180 — \pi$

$x — \pi/6$ | $x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30°$

d) $\frac{12(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4})}{8_{\frac{5\pi}{4}}} = \frac{12_{\frac{5\pi}{4}}}{8_{\frac{5\pi}{4}}} = \frac{12}{8}_{\frac{5\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}}$

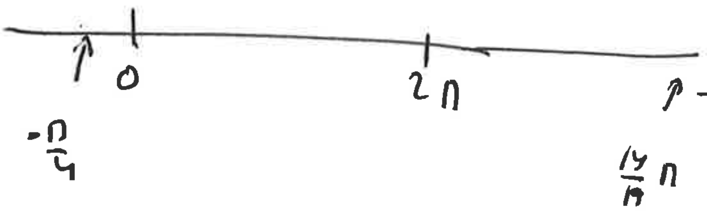
$= \frac{3}{2}_{0°}$

(7) $(1-i)^8 = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^8 = 16\, e^{i\,14\pi} = 16 e^{i0} = 16_{0^0}$



$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan \frac{-1}{1} = -45^0 = -\frac{\pi}{4}$ rad.



$-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ rad. arg. principal

$\frac{14}{n}\pi$

$14\pi \;\llcorner\; \frac{2\pi}{7}$

(8) b) $\sqrt[5]{-i} = (-i)^{1/5}$

$z = -i, \quad n = 5, \quad$ $|z| = 1, \quad |z|^{1/5} = 1$

$\theta = \arctan \frac{-1}{0} = \frac{3\pi}{2}$

$z^{1/5} = \{ w \in \mathbb{C} : w^5 = z \}$

$= \{ w = |w| e^{i\phi_k} : |w| = |z|^{1/5},$

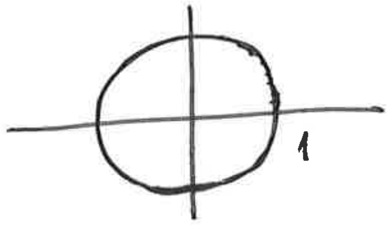
$\phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{5}, \quad k = 0,1,2,3,4 \}$

$= \{ w = |w| e^{i\phi_k} : \phi_k = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5}, \quad k = 0,1,\dots,4 \}$

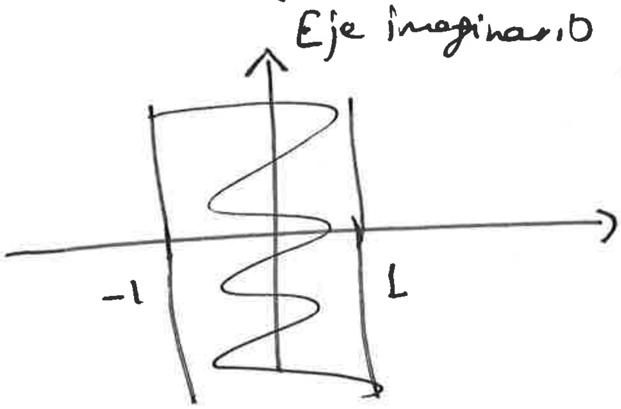
$\phi_0 = \frac{3\pi}{10}, \quad \phi_1 = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{5}, \quad \phi_2 = \frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{5}$

$\phi_3 = \frac{\frac{3\pi}{2} + 6\pi}{5}, \quad \phi_4 = \frac{\frac{3\pi}{2} + 8\pi}{5}.$

⑨ a) $z \in \mathbb{C} : |z| = 1$ $\equiv$ circunferencia de radio 1.



c) $z = x + iy$, $|\operatorname{Re} z = x| \leq 1$



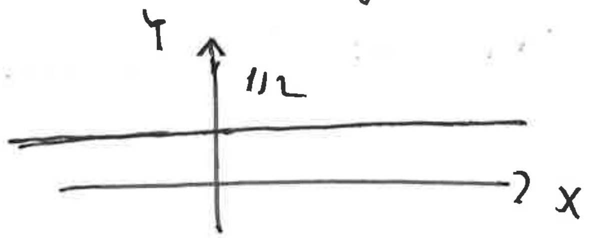
(d) $\{z \in \mathbb{C} : z - \bar{z} = i\}$

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$$z - \bar{z} = x + iy - x + iy$$

$$= 2iy = i \iff 2y = 1 \to y = \frac{1}{2}$$



⑩ b) $2_{\frac{\pi}{3}} + i + z e^{-\frac{\pi}{3}i} = 0$

$$2_{\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + z e^{-i\frac{\pi}{3}} = 0; \quad \times e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$2e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + z e^{i0} = 0;$$

$$2e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{5\pi}{6}} + z = 0 \to z = -2e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z = -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$-\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right)$$

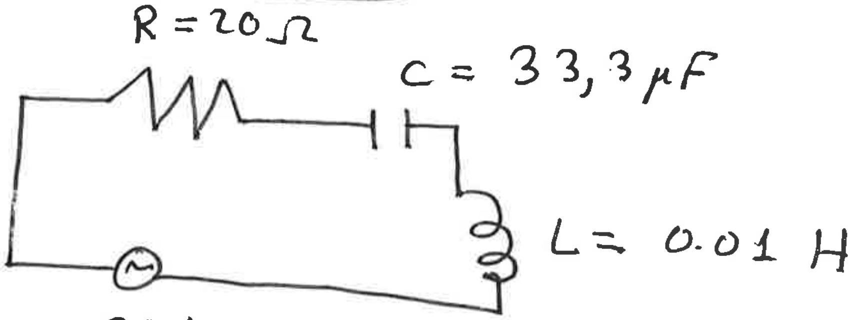
$$= -2\left(-\frac{1}{2} + i\,0.8660..\right)$$

$$-\left(-0.8660 + i\,\frac{1}{2}\right)$$

$$= 1 - i\,1.73 + 0.8660 - i\,0.5$$

$$= \boxed{1.8660 - i\,2.232}$$

12



$$\mathcal{E}(t) = 353,5 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = 3000\,\text{rad/s} \quad , \quad \phi = -10^\circ$$

a) $$\vec{Z} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) j$$

$$= 20 + \left(3000 \times 0.01 - \frac{1}{3000 \cdot 33,3 \times 10^{-6}}\right) j$$

$$= (20 + 20j)\,\Omega$$

(b) $\vec{E} = 353{,}5\, e^{-10j}$

$\vec{E} = \vec{I} \cdot \vec{Z}$

$$\vec{I} = \frac{\vec{E}}{\vec{Z}} = \frac{353{,}5\, e^{-10j}}{|\vec{Z}|\, \arctan \frac{20}{20}} = \frac{353{,}5\, e^{-10j}}{28{,}8\ e^{45j}} = 12.5_{-55^\circ}$$

c) $\vec{V}_R = R\vec{I} = 20 \cdot 12{,}5_{-55^0} = 20_{0^0} \cdot 12{,}5_{-55^0}$

$= 250_{-55^0}$

$\vec{V}_L = \vec{I} \cdot \vec{X}_L = 12{,}5_{-55^0} \cdot 30_{90^0} = 375_{30^0}$

$\vec{X}_L = \omega L j =$

$\vec{V}_C = \vec{I} \cdot \vec{X}_C = 12{,}5_{-55^0} \cdot 10_{-90^0} = 125_{-145^0}.$

$\vec{X}_C = -\frac{1}{\omega C} j$

(11) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$t \mapsto f(t) = 4 e^{-t} e^{100\pi t i}$

$\operatorname{Re} f(t), \quad \operatorname{Im} f(t)$

$$f(t) = A e^{i(wt+\varphi)}$$

$$\operatorname{Re} f(t) = A \cos(wt + \varphi)$$

$$\operatorname{Im} f(t) = A \operatorname{sen}(wt + \varphi)$$

$A \equiv$ amplitud de la onda

$\varphi =$ fase inicial

$w =$ velocidad angular

w también se expresa como

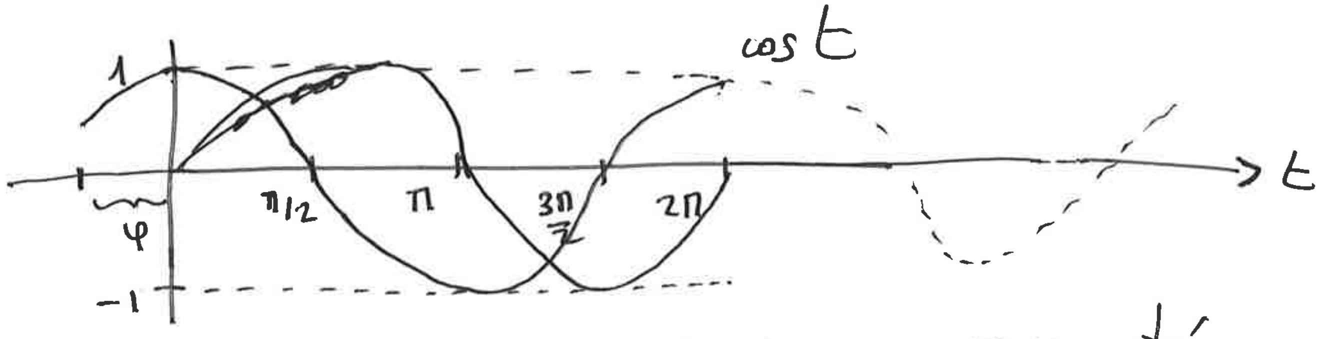
$w = 2\pi f$, f donde

$f = \frac{1}{T} \equiv$ frecuencia de oscilación

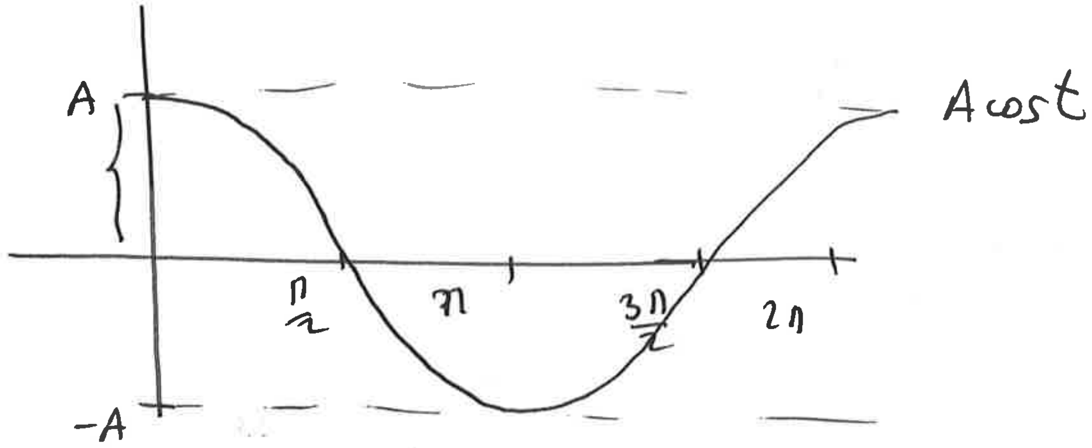
$T \equiv$ periodo de oscilación.

Vamos a interpretar físicamente estos parámetros.

Gráficos de $\cos(t)$ y $\operatorname{sen}(t)$

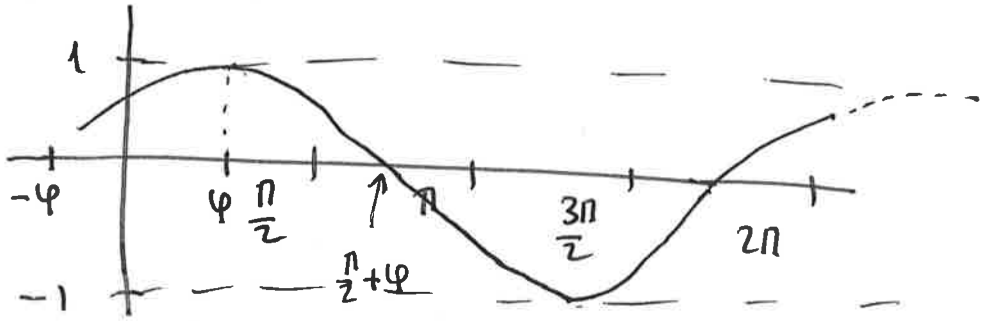


$\operatorname{sen} t = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ seno y coseno están desfasados $\pi/2$ rad $\equiv 90^0$.



$A \equiv$ amplitud

- $\cos(t-\varphi)$, $0 < \varphi < \pi/2$ rad

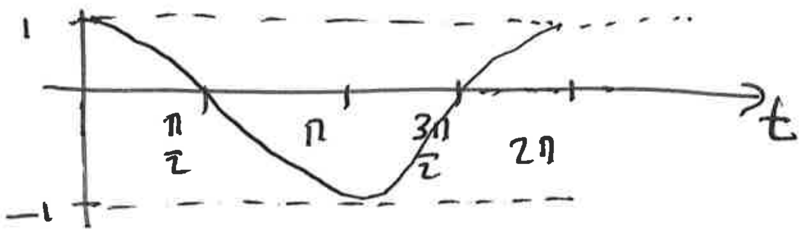


φ traslada la onda hacia la derecha (un ángulo φ)

- $\cos(\omega t)$

* ~~$\omega = 1$~~

* caso $\omega = 1$

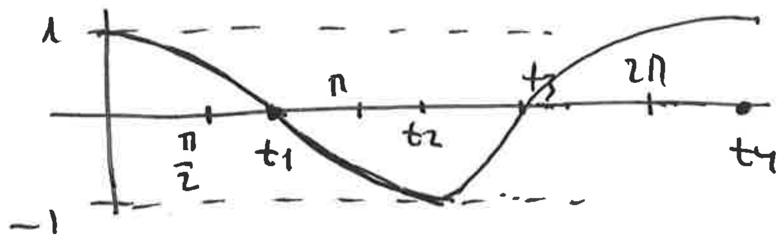


$T = 2\pi$ periodo de oscilación

$f = \frac{1}{2\pi}$ frecuencia de oscilación

$\omega = 2\pi f \equiv 1$ velocidad angular

* Caso $0 < \omega < 1$. $\cos(\omega t)$



t_1 tal que $\omega t_1 = \pi/2 \to t_1 = \frac{\pi/2}{\omega} > \pi/2$

t_2 " " $\omega t_2 = \pi \to t_2 = \frac{\pi}{\omega} > \pi$

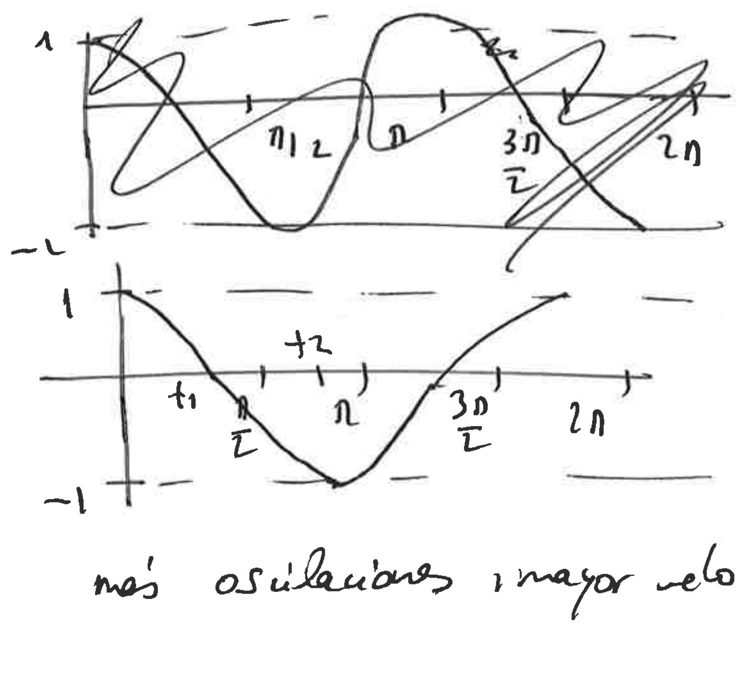
t_3 " " $\omega t_3 = \frac{3\pi}{2} \to t_3 = \frac{3\pi/2}{\omega} > 3\pi/2$

t_4 " " $\omega t_4 = 2\pi \to t_4 = \frac{2\pi}{\omega} > 2\pi$

~~w<~~ menos oscilaciones, menor velocidad angular.

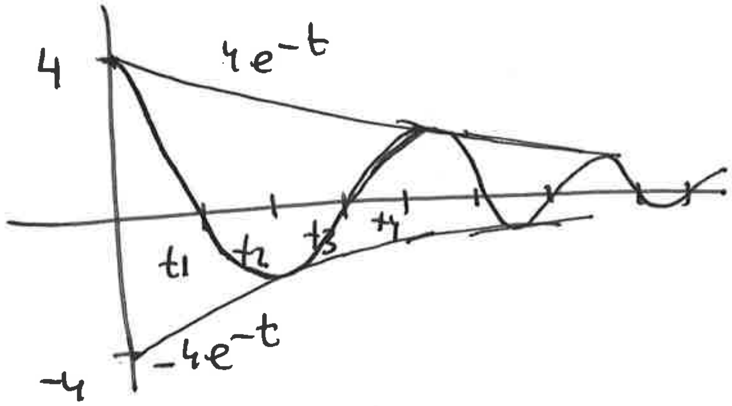
* Caso $\omega > 1$. $\cos(\omega t)$

t_1 t.q. $\omega t_1 = \pi/2 \to t_1 = \frac{\pi/2}{\omega} < \pi/2$



más oscilaciones, mayor velocidad angular.

$$\mathrm{Re}\, f(t) = 4e^{-t}\cos(100\pi t)$$



$$100\pi t_1 = \pi/2 \to t_1 = \frac{\pi/2}{100\pi} = \frac{1}{200}$$

$$100\pi t_2 = \pi \to t_2 = \frac{\pi}{100\pi} = \frac{1}{100}$$

$$100\pi t_3 = \frac{3\pi}{2} \to t_3 = \frac{3\pi/2}{100\pi} = \frac{3}{200}$$

$$t_4 = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$$